

Złożoność algorytmów



Złożoność pamięciowa

- liczba i rozmiar struktur danych wykorzystywanych w algorytmie

Złożoność czasowa

- liczba operacji elementarnych wykonywanych w trakcie przebiegu algorytmu

Złożoność algorytmów - Dokładniej



- ZŁOŻONOŚĆ CZASOWA ALGORYTMU - zależność pomiędzy liczbą operacji elementarnych wykonywanych w trakcie przebiegu algorytmu a rozmiarem danych wejściowych (podawana jako funkcja rozmiaru tych danych)
- *np.*
 - | sortowanie bąbelkowe: $F(N) = ?$, gdzie N jest długością listy
 - | algorytm rozwiązywania problemu wież Hanoi: $F(N) = ?$, gdzie N jest liczbą krążków
 - | wyznaczanie minimalnego drzewa rozpinającego: $F(N, M) = ?$, gdzie N jest liczbą wierzchołków a M - liczbą krawędzi w grafie (sieci połączeń)

Co to znaczy w praktyce?



- **W praktyce złożoność czasowa decyduje o przydatności algorytmów**
- Ponieważ:
 - jest mitem stwierdzenie, że komputery są tak szybkie, że czas nie stanowi problemu (rozkład na czynniki pierwsze dużych liczb - 300 cyfr - wymaga milionów lat)
 - potrzebne jest rozwiązywanie coraz większych problemów:
 - komputerowe systemy wspomagania decyzji
 - komputerowe symulacje i prognozy
 - muszą funkcjonować systemy komputerowe czasu rzeczywistego
 - automatyczne sterowanie w złożonych układach

Zmniejszanie czasu wykonania

- Normalizacja wartości w tablicy jednowymiarowej (wektorze) względem maksimum:
- Dane: $V(1), V(2), \dots, V(N)$
- Algorytm 1
- 1. wyznacz w zmiennej MAX największą z wartości ;
- **2. dla I od 1 do N wykonaj :**
 - 2.1. $V(I) \leftarrow V(I) * 100 / MAX$
- Algorytm 2
- 1. wyznacz w zmiennej MAX największą z wartości ;
- 2. $ILORAZ \leftarrow 100 / MAX$;
- **3. dla I od 1 do N wykonaj :**
 - 3.1. $V(I) \leftarrow V(I) * ILORAZ$

Zmniejszanie czasu wykonania

- Wyszukiwanie liniowe elementu z listy o długości N :
- Algorytm 1
- 1. weź pierwszy element listy ;
- **2. wykonuj:**
 - 2.1. sprawdź czy bieżący element jest tym szukany ;
 - 2.2. sprawdź czy osiągnąłeś koniec listy ;
 - 2.3. weź następny element z listy
- **aż znajdziesz lub przejrzysz całą listę**

Zmniejszanie czasu wykonania

- Wyszukiwanie liniowe elementu z listy o długości N :
- Algorytm 2
- 1. dopisz szukany element na końcu listy ;
- 2. weź pierwszy element listy ;
- **3. wykonuj:**
 - 3.1. sprawdź czy bieżący element jest tym szukany ;
 - 3.2. weź następny element z listy
- **aż znajdziesz ;**
- 4. sprawdź czy jesteś na końcu listy

Poprawianie złożoności algorytmu

- Porównujemy dwa algorytmy wykonujące to samo zadanie za pomocą jednej iteracji ograniczonej (liczba iteracji N wynika jednoznacznie z rozmiaru danych wejściowych)
- czasy wykonania algorytmów w funkcji rozmiaru danych wynoszą:

- $F_1(N) = K_1 + L_1 * N$

- $F_2(N) = K_2 + L_2 * N$

- do ich porównania możemy wykorzystać iloraz:

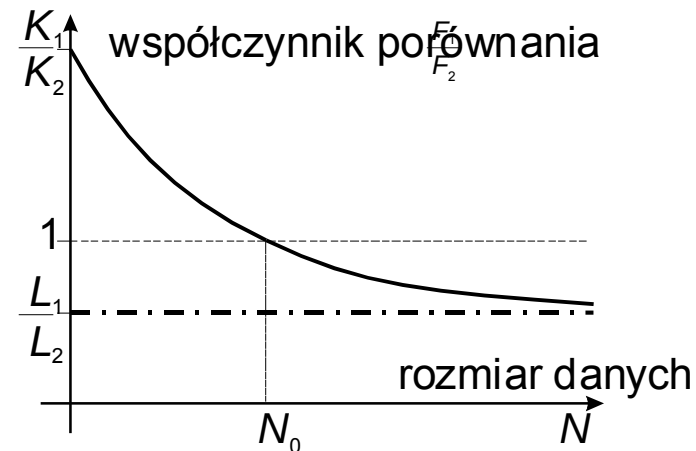
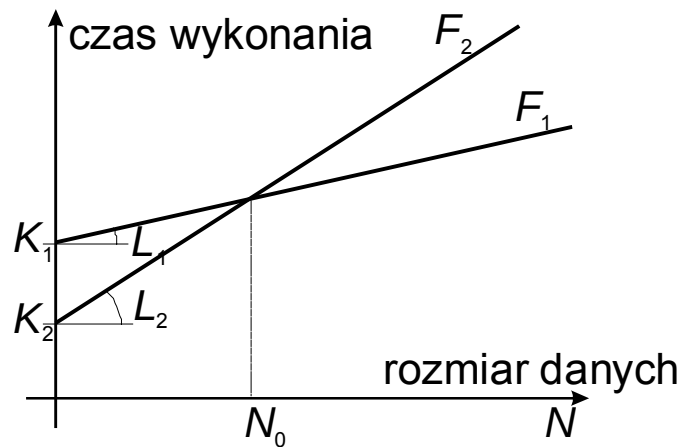
$$s(N) = \frac{F_1(N)}{F_2(N)}$$

- wtedy $s(N) = 1$ oznacza jednakową szybkość działania
- (ale tylko wtedy jest to możliwe, gdy $K_1 = K_2$ i $L_1 = L_2$)
- $s(N) < 1$ oznacza, że 1 algorytm jest szybszy
- (ale dla pewnych N może zachodzić $s(N) > 1$)

Poprawianie złożoności algorytmu

- Gdyby założyć, że interesują nas tylko zadania o rosnących rozmiarach ($N \rightarrow \infty$), to o relacji pomiędzy algorytmami powinna decydować wartość

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s(N) = \frac{L_1}{L_2}$$



Notacja O

- Dwa algorytmy o czasach wykonania $F_1(N)$ i $F_2(N)$ mają **złożoność tego samego rzędu**, jeśli ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F_1(N)}{F_2(N)} = C \quad \text{■} \quad \text{gdzie } 0 < C < \infty$$

- jeśli $C = 0$, to algorytm o czasie wykonania $F_1(N)$ ma niższy rząd złożoności (ma lepszą złożoność)
- jeśli $C = \infty$, to algorytm o czasie wykonania $F_1(N)$ ma wyższy rząd złożoności (ma gorszą złożoność)

Notacja O

- Algorytm o czasie wykonania $F(N)$ ma **złożoność liniową**, jeśli

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F(N)}{N} = C \quad \blacksquare \quad (0 < C < \infty);$$

- Złożoność rzędu N oznaczana jest symbolem $F(N) = \mathbf{O(N)}$

- Algorytm o czasie wykonania $F(N)$ ma **złożoność kwadratową**, jeśli

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F(N)}{N^2} = C \quad \blacksquare \quad (0 < C < \infty);$$

- Złożoność rzędu N^2 oznaczana jest symbolem $F(N) = \mathbf{O(N^2)}$

- **Dopiero znalezienie algorytmu o niższym rzędzie złożoności jest istotnym ulepszeniem rozwiązania danego zadania algorytmicznego!**

Właściwości notacji $O(\cdot)$

- zapis $F(N) = O(g(N))$ oznacza spełnienie warunku $(0 < C < \infty)$; i można go odczytywać "algorytm ma złożoność rzędu $g(N)$ " lub "czas wykonania algorytmu jest $O(g(N))$ ",
- równość w zapisie $F(N) = O(g(N))$ powinna być rozumiana w ten sposób, że funkcja $F(N)$ jest jedną z funkcji, które spełniają powyższy warunek lub precyzyjniej, że należy do zbioru wszystkich funkcji spełniających powyższy warunek

Właściwości notacji $O(\cdot)$ cd

- $F(N) = O(F(N))$,
- $O(O(g(N))) = O(g(N))$,
- $c \cdot O(g(N)) = O(g(N))$ (dla $0 < c < \infty$),
- $O(g(N)) + O(h(N)) = O(g(N) + h(N))$,
- $O(g(N)) \cdot O(h(N)) = O(g(N) \cdot h(N)) = g(N) \cdot O(h(N)) = h(N) \cdot O(g(N))$,
- jeśli zachodzi , $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{g(N)}{h(N)} = 0$
 - to $O(g(N)) + O(h(N)) = O(g(N) + h(N)) = O(h(N))$,
- w wielu książkach to, co tutaj oznaczane jest symbolem $O(g(N))$ oznaczane jest $\Theta(\mathbf{g(N)})$ (theta)

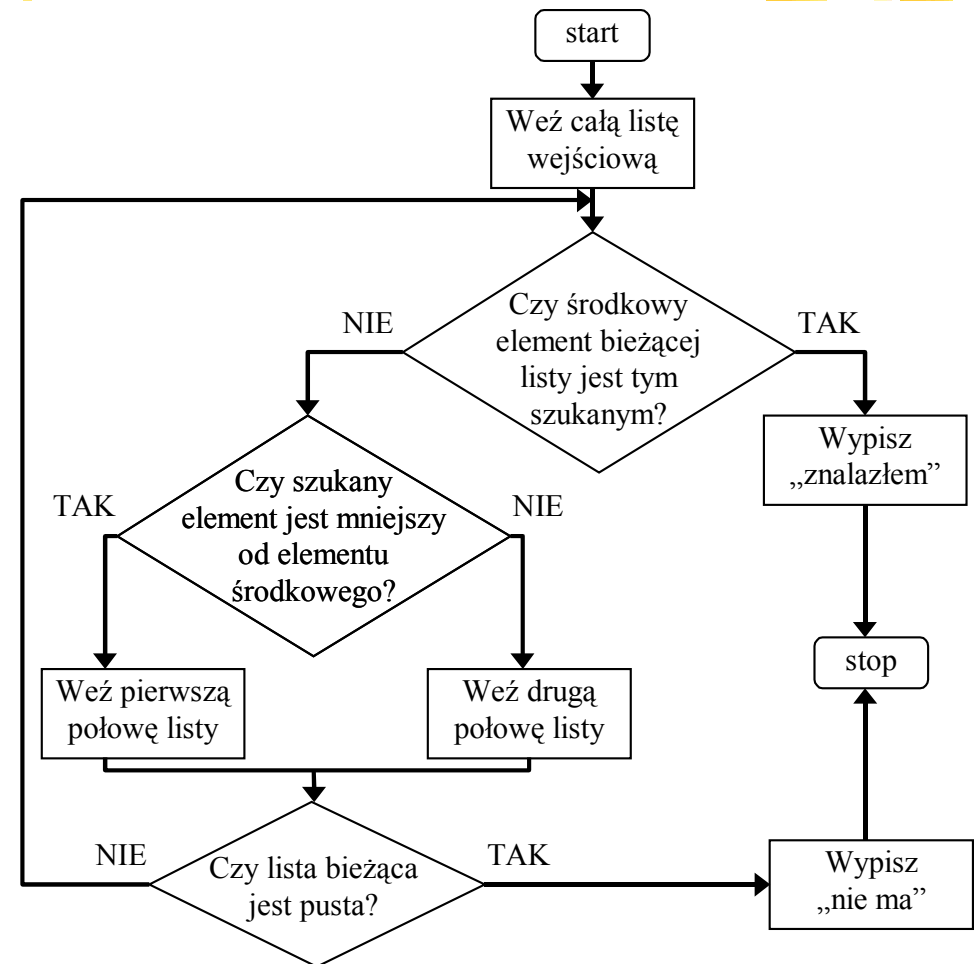
Ulepszanie rzędu wielkości

- Jeśli algorytm wykonuje różną liczbę iteracji w zależności od konkretnych danych wejściowych możemy badać czas jego wykonania **w najgorszym przypadku**.
- ◇ czas wykonania Alg. 1 dla wyszukiwania liniowego $F_1(N) \approx 2 * N$
- ◇ czas wykonania Alg. 2 dla wyszukiwania liniowego $F_2(N) \approx N$
- ◇ oba mają pesymistyczny czas wykonania $O(N)$ - mogą zdarzyć się takie dane wejściowe, dla których trzeba będzie przejrzeć całą listę o długości N

Ulepszanie rzędu wielkości

- Czy można zaproponować algorytm o lepszej złożoności?
- Wyszukiwanie **binarne** elementu z listy uporządkowanej:
- $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$
(dla każdego $i < j$ zachodzi $Y_i \leq Y_j$)

Algorytm 3



Ulepszanie rzędu wielkości

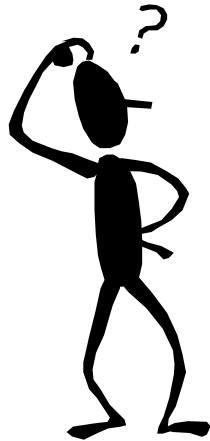
- Ile razy jest powtarzana w najgorszym przypadku iteracja w algorytmie? Odpowiedź: $1 + \log_2 N$
- W najgorszym przypadku złożoność algorytmu wyszukiwania binarnego wynosi **$O(\log_2 N)$**

- Ponieważ
$$\frac{\log_2 N}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 ,$$

czyli algorytm wyszukiwania binarnego ma złożoność **o rząd niższą** od prostego wyszukiwania, ale ma zastosowanie tylko dla list uporządkowanych

O ile lepiej ?

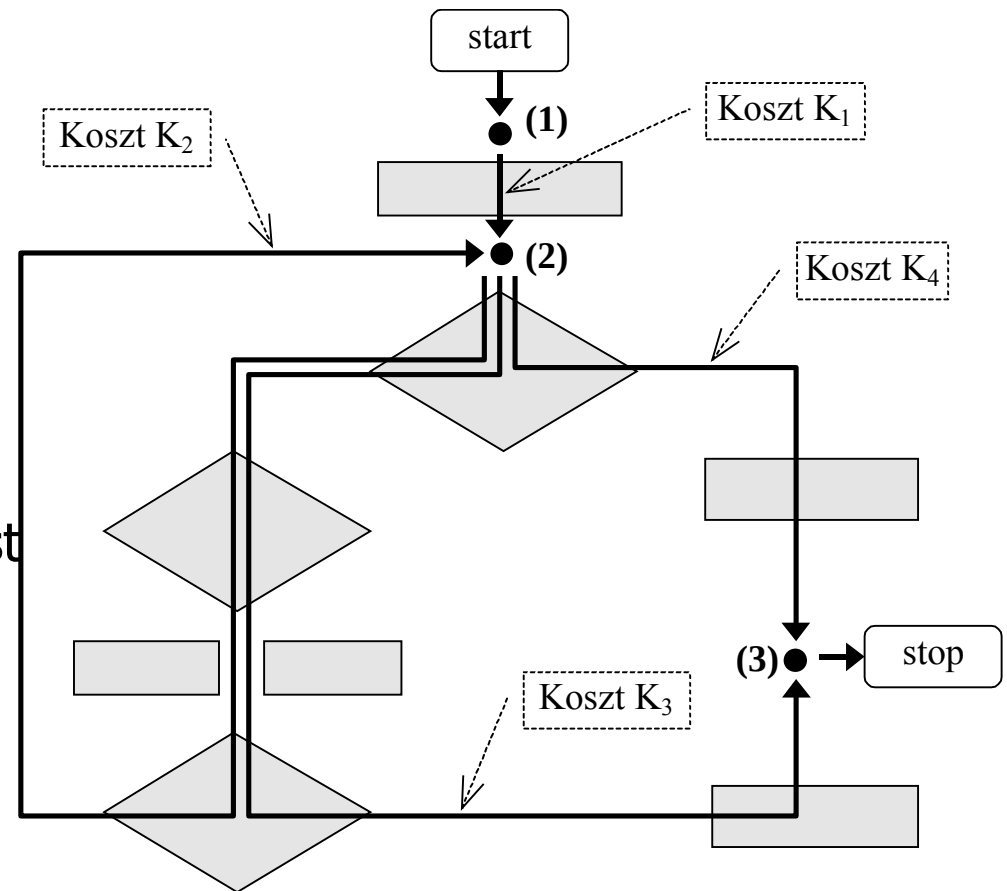
Skala ulepszenia:



N	$1 + \lfloor \log_2 N \rfloor$
10	4
100	7
1 000	10
10 000	14
1 000 000	20
1 000 000 000	30
1 000 000 000 000	40
1 000 000 000 000 000	50
1 000 000 000 000 000 000	60

Jak szacować?

- Całkowity koszt czasowy w najgorszym przypadku:
- $K_1 + \max(K_3, K_4) + K_2 * \log_2 N$
- Nie ma znaczenia stała liczba operacji podstawowych wykonywanych w każdym kroku iteracji – wystarczy do zliczania wybrać taką, która jest wykonywana w każdym kroku raz.



Jak szacować? cd

- Całkowity koszt czasowy w najgorszym przypadku:
 - $K_1 + \max(K_3, K_4) + K_2 * \log_2 N$
- Nie ma znaczenia stała liczba operacji podstawowych wykonywanych w każdym kroku iteracji – wystarczy do zliczania wybrać taką, która jest wykonywana w każdym kroku raz.
- **O złożoności algorytmu decyduje liczba wykonywanych iteracji**

Przykłady...

- **sortowanie bąbelkowe w pierwotnej wersji (zagnieżdżone iteracje)**

- 1. wykonaj co następuje $N - 1$ razy:
 - 1.1. ... ;
 - 1.2. wykonaj co następuje $N - 1$ razy:
 - 1.2.1. ... ;

- Całkowity koszt czasowy w najgorszym przypadku wynosi z dokładnością do stałych: $(N - 1) * (N - 1) = N^2 - 2N + 1$;

- N^2 jest **składnikiem dominującym**, czyli złożoność jest **$O(N^2)$**

- **sortowanie bąbelkowe ulepszone**

Całkowity koszt czasowy w najgorszym przypadku wynosi:
 $(N - 1) + (N - 2) + (N - 3) + \dots + 2 + 1 = 0,5 \cdot N^2 - 0,5 \cdot N$, czyli mniej,

ale nadal złożoność pozostaje **$O(N^2)$**

Przykłady...

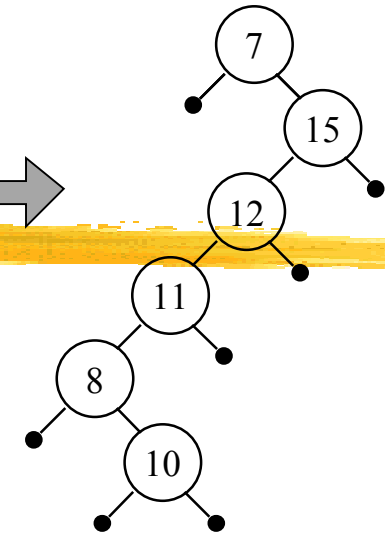
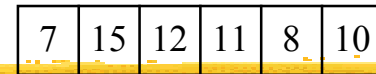


- sumowanie zarobków pracowników - złożoność $O(N)$
- sumowanie zarobków pracowników zarabiających więcej od swych bezpośrednich przełożonych - złożoność $O(N^2)$
- znajdowanie największej przekątnej w wielokącie wypukłym metodą naiwną - złożoność $O(N^2)$
- znajdowanie największej przekątnej w wielokącie wypukłym metodą obrotu prostych równoległych - złożoność $O(N)$

Przykłady...

- **rekurencyjny algorytm dla wież Hanoi:**
- **procedura przenieś N ;**
 - 1. jeśli $N = 1$, to wypisz ruch i koniec;
 - 2. w przeciwnym razie (tj. jeśli $N > 1$) wykonaj co następuje:
 - 2.1. wywołaj **przenieś** $N - 1$;
 - 2.2. wypisz ruch ;
 - 2.3. wywołaj **przenieś** $N - 1$;
- Oznaczmy nieznany koszt czasowy przez $T(N)$ i ułóżmy równania, które musi spełniać - tzw. **równania rekurencyjne**:
 - $T(1) = 1$
 - $T(N) = 2 * T(N-1) + 1$
- Spełnia je koszt $T(N) = 2^N - 1$, czyli złożoność jest **$O(2^N)$**

Przykłady...



- sortowanie drzewiaste (bez samoorganizacji drzewa):
ma pesymistyczną złożoność $O(N^2)$, bo wprowadzie lewostronne obejście drzewa ma złożoność liniową $O(N)$, ale konstrukcja binarnego drzewa poszukiwań ma złożoność kwadratową (w najgorszym przypadku)
- sortowanie drzewiaste (z samoorganizacją drzewa):
ma złożoność $O(N * \log N)$, co daje wyraźną poprawę sprawności algorytmu

Skala ulepszenia:	N	N^2	$N * \log N$
	10	100	33
	100	10 000	664
	1 000	1 000 000	9 965
	1 000 000	1 000 000 000 000	19 931 568
	1 000 000 000	1 000 000 000 000 000 000	29 897 352 853

Przykłady...

- **sortowanie przez scalanie (rekurencyjne):**
- *procedura **sortuj-listę** L :*
 - 1. jeśli L zawiera tylko jeden element, to jest posortowana;
 - 2. w przeciwnym razie wykonaj co następuje:
 - 2.1. ... ;
 - 2.2. wywołaj **sortuj-listę** połowa L ;
 - 2.3. wywołaj **sortuj-listę** połowa L ;
 - 2.4. scal posortowane połowy listy L w jedną posortowaną listę;
- Oznaczmy nieznany koszt czasowy przez $T(N)$ i ułóżmy równania rekurencyjne, które musi spełniać:
 - $T(1) = 0$
 - $T(N) = 2 * T(0,5 * N) + N$
- Spełnia je koszt $T(N) = N * \log N$, czyli złożoność jest **$O(N * \log N)$**
- Sortowanie przez scalanie jest jednym z najlepszych algorytmów sortowania (choć wymaga obszaru pamięci rosnącego jak $O(N)$)

Średnia złożoność

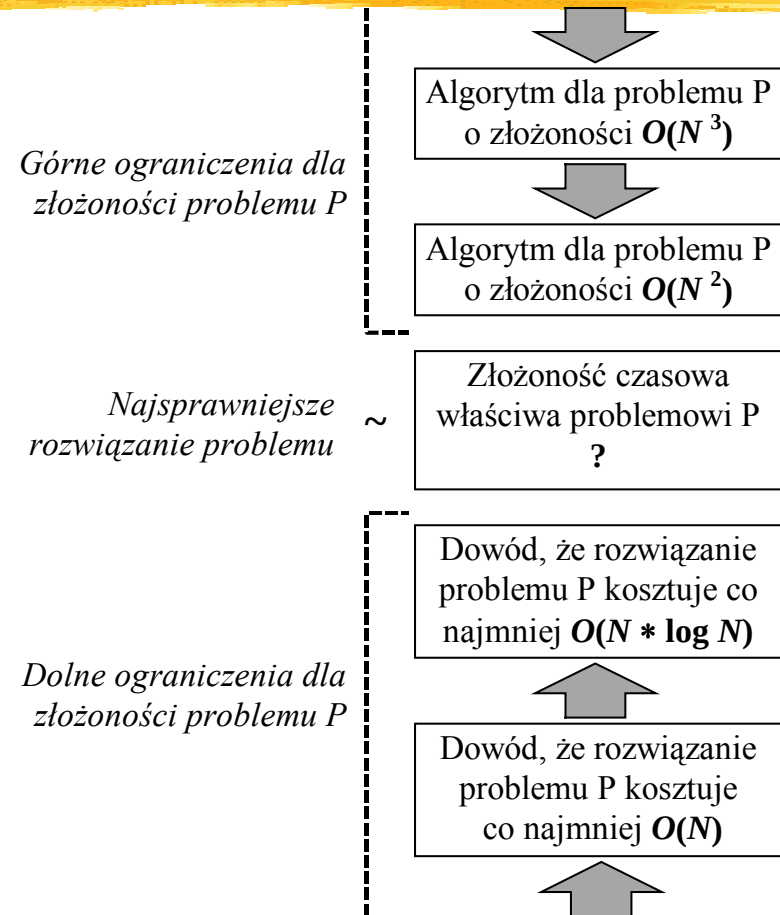
- Analiza najgorszego przypadku *lub* analiza średniego przypadku
- W analizie średniego przypadku istotną rolę odgrywają założenia o **rozkładzie prawdopodobieństwa** w zbiorze dopuszczalnych danych wejściowych.

<i>Algorytm</i>	<i>średni przyp.</i>	<i>najgorszy przyp.</i>
sumowanie zarobków	$O(N)$	$O(N)$
sumowanie zarobków z szukaniem bezp. Kierowników	$O(N^2)$	$O(N^2)$
sortowanie bąbelkowe	$O(N^2)$	$O(N^2)$
sortowanie drzewiaste z samoorganizacją drzewa	$O(N * \log N)$	$O(N * \log N)$
sortowanie przez scalanie	$O(N * \log N)$	$O(N * \log N)$
Quicksort	$O(N * \log N)$	$O(N^2)$

- Średni koszt czasowy algorytmu Quicksort - $1,4 N \log_2 N$

Czy można skonstruować jeszcze lepszy algorytm?

- Każdy poprawny algorytm znajdujący rozwiązanie danego problemu ustanawia dla niego **górne ograniczenie** złożoności.
- Możliwości dalszej poprawy rzędu złożoności algorytmu będącego rozwiązaniem problemu wyznacza **dolne ograniczenie**!



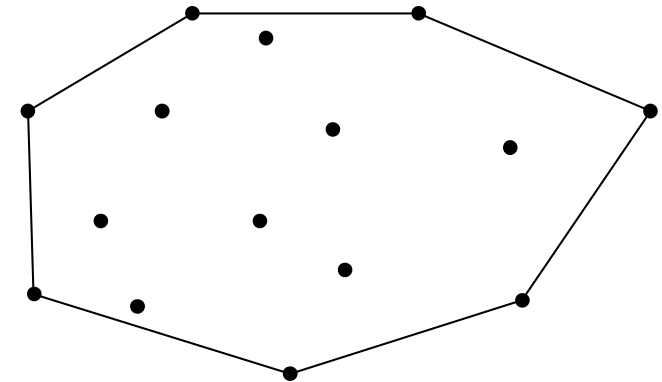
Problemy zamknięte i luki algorytmiczne

<i>problem</i>	<i>dolne ogr.</i>	<i>górne ogr.</i>
przeszukiwanie listy nieuporządkowanej	$O(N)$	$O(N)$
przeszukiwanie listy uporządkowanej	$O(\log N)$	$O(\log N)$
sortowanie	$O(N * \log N)$	$O(N * \log N)$
minimalne drzewo rozpinające	$O(N)$	$O(f(N) * N)^+$

- $^+ f(N)$ - bardzo wolno rosnąca funkcja, np.
- dla $N=16$ ma wartość 3
- dla $N=64000$ ma wartość 4
- dla N = znacznie więcej niż liczba cząstek we wszechświecie ma wartość 5

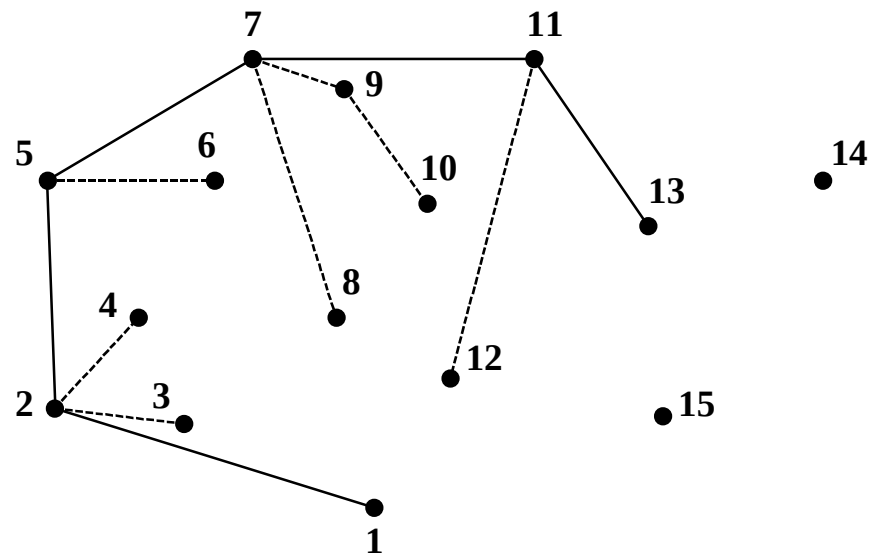
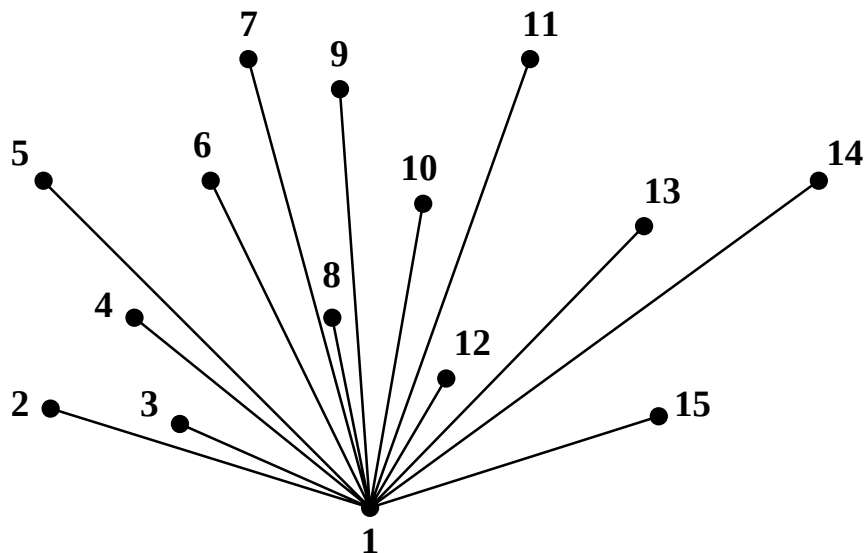
Przykład analizy złożoności algorytmu

- Problem odgradzania śpiących tygrysów:
- algorytm "naiwny" ma złożoność $O(N^3)$
- algorytm o znacznie lepszej złożoności:
- 1.znajdź punkt "najniżej" położony - P_1 ;
- 2.posortuj pozostałe punkty rosnąco według kątów tworzonych przez odcinki z linią poziomą przechodzącą przez P_1 - powstanie lista $P_2, \dots, P_N$;
- 3.dołącz do powłoki punkty P_1 i P_2 ;
- 4.dla J od 3 do N wykonuj ;
 - 4.1.dołącz do powłoki punkt P_J ;
 - 4.2.cofając się wstecz po odcinkach aktualnej powłoki, usuwaj z niej te punkty P_K , dla których prosta przechodząca przez P_K i P_{K-1} przecina odcinek , aż do napotkania pierwszego punktu nie dającego się usunąć ;



1. *What is the purpose of the study?*
 2. *What are the research objectives?*
 3. *What is the research methodology?*
 4. *What are the results of the study?*
 5. *What are the conclusions of the study?*
 6. *What are the limitations of the study?*
 7. *What are the implications of the study?*
 8. *What are the future research directions?*
 9. *What are the contributions of the study?*
 10. *What are the key findings of the study?*
 11. *What are the main results of the study?*
 12. *What are the primary outcomes of the study?*
 13. *What are the secondary outcomes of the study?*
 14. *What are the tertiary outcomes of the study?*
 15. *What are the quaternary outcomes of the study?*
 16. *What are the quinary outcomes of the study?*
 17. *What are the senary outcomes of the study?*
 18. *What are the septenary outcomes of the study?*
 19. *What are the octenary outcomes of the study?*
 20. *What are the nonary outcomes of the study?*
 21. *What are the decenary outcomes of the study?*
 22. *What are the undecenary outcomes of the study?*
 23. *What are the duodecenary outcomes of the study?*
 24. *What are the tredecenary outcomes of the study?*
 25. *What are the quattuordecenary outcomes of the study?*
 26. *What are the quindecenary outcomes of the study?*
 27. *What are the sexdecenary outcomes of the study?*
 28. *What are the septendecenary outcomes of the study?*
 29. *What are the octodecenary outcomes of the study?*
 30. *What are the nonodecenary outcomes of the study?*
 31. *What are the vigintenary outcomes of the study?*
 32. *What are the unvigintenary outcomes of the study?*
 33. *What are the bivigintenary outcomes of the study?*
 34. *What are the trivigintenary outcomes of the study?*
 35. *What are the quadvigintenary outcomes of the study?*
 36. *What are the quinvigintenary outcomes of the study?*
 37. *What are the sexvigintenary outcomes of the study?*
 38. *What are the septenvigintenary outcomes of the study?*
 39. *What are the octovigintenary outcomes of the study?*
 40. *What are the nonavigintenary outcomes of the study?*
 41. *What are the vigintigintenary outcomes of the study?*
 42. *What are the unvigintigintenary outcomes of the study?*
 43. *What are the bivigintigintenary outcomes of the study?*
 44. *What are the trivigintigintenary outcomes of the study?*
 45. *What are the quadvigintigintenary outcomes of the study?*
 46. *What are the quinvigintigintenary outcomes of the study?*
 47. *What are the sexvigintigintenary outcomes of the study?*
 48. *What are the septenvigintigintenary outcomes of the study?*
 49. *What are the octovigintigintenary outcomes of the study?*
 50. *What are the nonavigintigintenary outcomes of the study?*
 51. *What are the vigintigintigintenary outcomes of the study?*
 52. *What are the unvigintigintigintenary outcomes of the study?*
 53. *What are the bivigintigintigintenary outcomes of the study?*
 54. *What are the trivigintigintigintenary outcomes of the study?*
 55. *What are the quadvigintigintigintenary outcomes of the study?*
 56. *What are the quinvigintigintigintenary outcomes of the study?*
 57. *What are the sexvigintigintigintenary outcomes of the study?*
 58. *What are the septenvigintigintigintenary outcomes of the study?*
 59. *What are the octovigintigintigintenary outcomes of the study?*
 60. *What are the nonavigintigintigintenary outcomes of the study?*
 61. *What are the vigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 62. *What are the unvigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 63. *What are the bivigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 64. *What are the trivigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 65. *What are the quadvigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 66. *What are the quinvigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 67. *What are the sexvigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 68. *What are the septenvigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 69. *What are the octovigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 70. *What are the nonavigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 71. *What are the vigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 72. *What are the unvigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 73. *What are the bivigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 74. *What are the trivigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 75. *What are the quadvigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 76. *What are the quinvigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 77. *What are the sexvigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 78. *What are the septenvigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 79. *What are the octovigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 80. *What are the nonavigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 81. *What are the vigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 82. *What are the unvigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 83. *What are the bivigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 84. *What are the trivigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 85. *What are the quadvigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 86. *What are the quinvigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 87. *What are the sexvigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 88. *What are the septenvigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 89. *What are the octovigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 90. *What are the nonavigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 91. *What are the vigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 92. *What are the unvigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 93. *What are the bivigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 94. *What are the trivigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 95. *What are the quadvigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 96. *What are the quinvigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 97. *What are the sexvigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 98. *What are the septenvigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 99. *What are the octovigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*
 100. *What are the nonavigintigintigintigintigintigintigintenary outcomes of the study?*

kolejne iteracje w kroku 4.



Podsumowanie czasu wykonania

- | Krok 1. $O(N)$
- | Krok 2. $O(N * \log N)$
- | Krok 3. $O(1)$
- | Krok 4. $O(N)$
- | Razem $O(N * \log N)$

